

# LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA INICIAR LA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

## Mathematical modelling to start building spanning set and span

Andrea Cárcamo<sup>a</sup>, Joan Gómez<sup>b</sup>, Josep Fortuny<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Universidad Austral de Chile, <sup>b</sup> Universidad Politécnica de Cataluña, <sup>c</sup> Universidad Autónoma de Barcelona

### Resumen

*Se presenta una secuencia didáctica elaborada siguiendo los fundamentos de la modelización matemática en la educación matemática realista con el propósito de contribuir a la construcción de conjunto generador y espacio generado. Posteriormente, se exponen brevemente las conclusiones respecto a su aplicación piloto en el aula y la propuesta de refinamiento de la misma para una próxima experimentación.*

**Palabras clave:** *modelización matemática, modelos emergentes, conjunto generador, espacio generado.*

### Abstract

*A didactic sequence is presented elaborated following the fundamentals of mathematical modelling in realistic mathematics education in order to contribute to the construction of spanning set and span. Subsequently, briefly outlines the findings on its pilot implementation in the classroom and the proposed refinement of it for an upcoming experiment.*

**Keywords:** *mathematical modelling, realistic mathematics education, spanning set, span.*

### INTRODUCCIÓN

Álgebra lineal se encuentra entre las primeras asignaturas del ámbito matemático que tiene un estudiante de ingeniería, la que es considerada una de las fundamentales, ya que por una parte cumple un rol esencial para el desarrollo posterior de otras asignaturas, debido a su naturaleza tanto unificadora como generalizadora (Dorier, 2003), pero además, por otro, es una herramienta poderosa para resolver problemas de distintas áreas (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993). Sin embargo, a pesar de su relevancia, la enseñanza del álgebra lineal a nivel universitario es casi universalmente considerada como una experiencia frustrante tanto para profesores como estudiantes (Hillel, 2000) e independiente de cómo se enseñe, es una asignatura difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier & Sierpiska, 2001).

Con la finalidad de buscar alternativas para la enseñanza del álgebra lineal, se han diseñado y realizado experiencias, entre ellas, la realización de variaciones a las clases magistrales, ya sea incorporando el uso de tecnología, el trabajo en grupo o creando un ambiente colaborativo donde el profesor tras haber explicado un tema nuevo, debate con los estudiantes (Day & Kalman, 1999). Por su parte, Gómez y Fortuny (2002) dan a conocer el proceso de modelización matemática como una herramienta innovadora en la enseñanza de álgebra lineal, señalando que es una metodología eficaz, la cual funciona como una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos al mismo tiempo que establece la hermandad entre matemática y realidad.

Precisamente, en lo que se refiere a las aplicaciones y la modelización, Kaiser (2010) expone que en las últimas décadas, tanto el aprendizaje como la enseñanza de éstas se han convertido en temas

importantes, no sólo en la escuela sino que también en la universidad, debido a la creciente demanda en el mundo por el uso de las matemáticas en: la ciencia, la tecnología y la vida diaria. Sin embargo, son diversas las dificultades que se presentan al introducir la modelación en las clases de matemáticas, entre ellas fundamentalmente: la complejidad que exige la producción de un modelo (Trigueros, 2009) y el tiempo de convivencia tanto de los docentes como de los estudiantes con la enseñanza tradicional (Biembengut & Hein, 2004), lo que conlleva a que exista una fuerte resistencia a la implementación de una nueva metodología.

Vanegas y Henao (2013) señalan que frente a estas dificultades emerge una respuesta plausible que se refiere a la consideración de los contextos tal como se utilizan dentro de la educación matemática realista (EMR), es decir, que promuevan el proceso de modelación matemática en las clases a la vez que se creen puentes para pasarse entre lo concreto y lo abstracto, facilitando de esta manera, diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

A partir de lo expuesto, surge el interés de diseñar y aplicar una secuencia didáctica que incluya la modelización matemática conectada con la EMR en álgebra lineal. En particular, para esta experiencia de enseñanza, se consideran los conceptos de conjunto generador y espacio generado, ya que es relevante su comprensión porque forman parte de espacios vectoriales los que según señalan Kolman y Hill (2006) se utilizan en muchas aplicaciones de matemáticas, ciencias e ingeniería. Considerando lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta una secuencia didáctica que incorpore modelización matemática a la construcción de conjunto generador y espacio generado? Para responder a esta pregunta se plantea como objetivo diseñar e implementar en aula una secuencia didáctica basada en el uso de la modelización matemática en la EMR que promueva la construcción de conjunto generador y espacio generado.

## **LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)**

La EMR fue determinada mayormente por las ideas de Freudenthal acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza. Su enfoque es la utilización de situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas, los cuales son matematizados a través de modelos mediadores entre lo concreto y lo abstracto para formar relaciones más formales y estructuras abstractas. (Heuvel-Panhuizen, 2002)

Según lo que plantean Zolkower, Bressan y Gallego (2006), las principales características de esta corriente son: a) Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos; b) El uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones; c) La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/ aprendizaje; d) El papel clave del docente como guía; e) La importancia de la interacción grupal y f) La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática. Todas éstas, se encuentran fundamentadas en los principios de la EMR, los cuales son: de actividad, de realidad, de niveles, de reinención guiada, de interacción y de interconexión.

En particular, el enfoque de modelización de la EMR se enmarca fundamentalmente dentro del principio de niveles que se refiere al proceso de matematización progresiva mediante el cual los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión que están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004). Como lo explica Gravemeijer (2007), los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal y en el transcurso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante. Para el progreso desde el modelo de actividad matemática informal al de razonamiento matemático formal Gravemeijer (1999) establece los llamados modelos emergentes que corresponden a cuatro tipos o

niveles de actividad: situacional (el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma, referencial (implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional), general (se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema) y formal (se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales, es decir, ya no se depende de modelos para lograr la actividad matemática).

En lo que se refiere a la modelización matemática en la EMR, según Kaiser y Sriraman (2006), ésta última se vincula con la perspectiva de modelación epistemológica y uno de los objetivos que tiene la modelización matemática desde este enfoque es promover el desarrollo de la teoría, es decir, lograr que los contenidos fundamentales de la matemática sean aprendidos en el trabajo con la modelación de fenómenos reales, pero sin perder aspectos importantes de la epistemología de los conceptos.

## **METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

Este estudio es exploratorio y siguiendo la línea de la EMR se utiliza la metodología cualitativa de la investigación de desarrollo (Bressan et al., 2004), la cual está basada en experiencias de aulas donde se ponen a prueba secuencias didácticas, las que se observan, registran, analizando hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos.

El objetivo de esta investigación es indagar con qué secuencia didáctica que incluya modelización matemática, los estudiantes logran progresar en la construcción de conjunto generador y espacio generado, desarrollando a su vez, herramientas teóricas que contribuyan a mejorar las prácticas en álgebra lineal. Para lo anterior, se elaboró una primera versión de la secuencia didáctica (basada en nuestra experiencia docente universitaria y en los comentarios de expertos), la cual fue aplicada en el aula con estudiantes de primer año de ingeniería de la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Vilanova i la Geltrú en el periodo 2013-2014. Los resultados del estudio se analizaron y evaluaron con el propósito de refinar la secuencia didáctica para realizar una nueva intervención en el aula.

Los datos que se recogieron en la realización de la investigación de desarrollo incluyeron: grabaciones en vídeo de cada clase, grabaciones en audio, copias del trabajo escrito de los estudiantes durante las clases, el diario del profesor-investigador y entrevistas individuales de estudiantes realizadas una vez que se aplicó la secuencia didáctica.

## **DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU IMPLEMENTACIÓN EN AULA**

Para el diseño e implementación de la secuencia didáctica se consideraron: los objetivos de aprendizaje, la trayectoria hipotética de aprendizaje, el rol del docente y el conjunto de tareas que forman la secuencia didáctica, la cual comienza con un problema real.

La secuencia didáctica contiene tres tareas que se inician con un problema real que les permite a los estudiantes utilizar tanto su conocimiento matemático como su experiencia con contraseñas para iniciar la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

En este estudio participaron 30 estudiantes de primer año de ingeniería, los cuales no habían efectuado, previamente, ninguna práctica de modelización matemática. Por otra parte, el desarrollo de la secuencia didáctica abarcó 3 sesiones de clase, las que se trabajaron en pequeños grupos (3 a 5 estudiantes) y el profesor tomó el rol de orientador.

La construcción de la secuencia didáctica se basó en la modelización matemática en la EMR y los niveles de Gravemeijer (1999). A continuación se describe brevemente cada tarea que compone la secuencia didáctica.

### **Tarea 1: Generando contraseñas seguras**

El principal objetivo de la tarea 1 es que los estudiantes utilicen sus conocimientos de matemática y de contraseñas para elaborar un generador de contraseñas seguras. Asimismo, tal como se concluyó en el estudio de Perdomo-Díaz, Camacho y Santos-Trigo (2012) se espera que el problema les facilite a los alumnos mostrar su habilidad en el proceso de representar, en términos matemáticos, información correspondiente a la situación planteada y de interpretar qué significan distintas expresiones matemáticas en ese contexto.

El contexto elegido para la tarea 1 fue la generación de contraseñas. La información que se les entrega a los estudiantes es una noticia que informa de redes sociales hackeadas principalmente porque sus contraseñas eran “débiles”, dando a conocer a la vez, las características que deben tener éstas para ser “excelentes”. A continuación, se les comenta que actualmente existen infinidad de programas y páginas web que ofrecen crear claves excelentes, sin embargo, algunas personas no confían en internet y optan por generar sus propias claves, utilizando una planilla Excel. Seguidamente, se les muestran ejemplos de métodos para crear contraseñas usando Excel. Con los antecedentes anteriores, se les propone el siguiente desafío: crear en grupo un generador de contraseñas que contemple el uso de vectores.

En esta tarea, se encuentra presente el nivel situacional porque ésta invita a que los estudiantes trabajen en la construcción de conjunto generador y espacio generado en un contexto real como son las contraseñas, ya que como plantean Wawro et al. (2012) el nivel situacional debe incitar a los estudiantes hacia las metas matemáticas en un entorno experiencial real.

### **Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado**

Esta tarea corresponde a una actividad referencial porque tal como señalan Wawro et al. (2012), todas las preguntas hacen alusión a la situación real propuesta inicialmente, pero ahora con un enfoque hacia una matemática más formal.

La tarea 2 se compone de dos apartados. En el apartado 1, se les pide a los estudiantes dos conjuntos, uno que contiene todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro que tiene vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtiene el vector genérico o patrón de sus contraseñas numéricas.

Posteriormente, luego de que el profesor introduce los conceptos a través de la visualización geométrica y los define formalmente, realizan el apartado 2 que consiste en hacer una analogía entre los nuevos conceptos y su generador de contraseñas.

### **Tarea 3: Aplicando lo aprendido**

El objetivo de la tarea 3 es cambiar el escenario de los estudiantes, es decir, dejar las actividades situacional y referencial relacionadas con generar contraseñas seguras para avanzar hacia los niveles de actividad general y formal respecto a conjunto generador y espacio generado. En esta tarea, utilizan estos conceptos para explorar y profundizar acerca de ellos, pero en problemas que involucran la notación convencional matemática.

Esta es una actividad general porque los estudiantes trabajan con preguntas que involucran tanto el concepto de conjunto generador como el de espacio generado, explorando sobre estos y además, como señalan Wawro et al. (2012), ellos ya no se refieren explícitamente o vuelven al contexto específico que en este caso corresponde al de generar contraseñas seguras. Además, los últimos problemas planteados en la tarea 3 pueden ser considerados como actividad formal porque los estudiantes en su resolución solo utilizan notación convencional matemática.

## **CONCLUSIONES**

El objetivo que se plantea en este estudio es diseñar e implementar en aula una secuencia didáctica basada en el uso de la modelización matemática en la EMR que promueva la construcción de conjunto generador y espacio generado. Para responder a éste se ha escogido la investigación de desarrollo y se ha realizado un estudio exploratorio, realizando una aplicación piloto de la secuencia didáctica creada para esta experiencia de aula.

A partir de los resultados podemos ver que esta primera versión de la secuencia didáctica presentó las siguientes ventajas:

- La tarea 1 que consiste en resolver un problema real admitió que los estudiantes hicieran uso de sus concepciones previas tanto del contexto que involucra la situación planteada (Contraseñas seguras) como de su conocimiento matemático.
- La tarea 2 permitió a los estudiantes iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado al explorar estos en una situación real para luego, establecer relaciones entre ellos. Además, contribuyó a que los estudiantes le encuentren sentido a lo que están aprendiendo y quizás también, a que disminuyan las dificultades que se presentan con estos conceptos, al relacionarlos con una situación cercana a ellos, a diferencia de las clases tradicionales en que los ven solo de forma abstracta.
- En la tarea 3, los estudiantes trabajaron con las definiciones de conjunto generador y espacio generado, evidenciándose por ejemplo, que la mayoría de ellos identifica la relación de inclusión que existe entre estos conceptos y también que reconocen las condiciones que debe cumplir un elemento para pertenecer a un espacio generado.

Por otra parte, el desarrollo de la secuencia didáctica mostró las siguientes dificultades:

- En todas las tareas de la secuencia didáctica, algunos estudiantes presentan problemas al expresar sus ideas empleando el lenguaje matemático, principalmente porque el uso de la notación matemática les resulta complejo.
- En la tarea 3 se observaron dos complicaciones, la primera de ellas relacionada con la pregunta que pide graficar para determinar el espacio generado por un conjunto generador dado, ya que los estudiantes necesitaron apoyo del profesor para tratar de responder a ésta y aun así, varios no lograron hacerla. Esto evidencia, que en esta secuencia didáctica, representar ejemplos específicos de los conceptos geoméricamente, más que una ayuda para su comprensión, resultó ser un obstáculo. El otro inconveniente que se observó, solo en algunos grupos, es que presentaron la dificultad mencionada por Nardi (1997) en relación a confundir ambos conceptos.

Considerando las ventajas y dificultades mostradas en esta primera aplicación de la secuencia didáctica creada para contribuir al aprendizaje de conjunto generador y espacio generado, se hace necesario considerar las siguientes modificaciones para el siguiente ciclo de aplicación de ésta:

- Elaborar una actividad de diagnóstico que recopile las concepciones previas de los estudiantes y a partir de ésta, construir tareas que refuercen estos conocimientos y especialmente lo referente al lenguaje matemático que utilizan durante la secuencia didáctica.
- Replantear la tarea 3 con la finalidad que se centre en preguntas en que los estudiantes realicen conjeturas acerca de conjunto generador y espacio generado, pero también que incorpore otras que sean propiamente del nivel de actividad formal. Además, eliminar la pregunta de construcción de gráficos para visualizar el espacio generado porque de acuerdo a los resultados, es un obstáculo más que una ayuda para el estudio de conjunto generador y espacio generado, puesto que es otra forma de representación matemática que se agrega,

además, del lenguaje abstracto de álgebra lineal, pero también, debido a que solo son casos particulares, ya que para los demás espacios vectoriales no es posible realizar este tipo de representación.

- Incorporar evaluación formativa en el desarrollo de la secuencia didáctica con el propósito de ir observando los progresos y dificultades de los estudiantes en relación a conjunto generador y espacio generado para posteriormente, realizar una retroalimentación pertinente.

La principal contribución de esta investigación ha sido entregar una primera aproximación de la forma en que la modelización matemática en la EMR puede ser utilizada para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal.

Finalmente, señalar que esta primera aplicación de la secuencia didáctica ha dado evidencias de que los estudiantes consiguen construir conjunto generador y espacio generado al iniciar el estudio de estos utilizando la modelización matemática en un problema real para luego, continuar con tareas construidas entorno a los niveles de actividad de Gravemeijer. Lo anterior, porque les permite darle un sentido en contexto real a lo que están aprendiendo, lo que les sirve de base para continuar con otras actividades que lo conducen hacia un conocimiento formal de los conceptos, pero, por otra parte, también indagar tanto nuevas situaciones como contenidos matemáticos en interacciones con sus pares, disminuyendo la dependencia que poseen con el profesor.

## Referencias

- Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Bressan, A., Zolkower, B. & Gallego, M. (2004). La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The linear algebra curriculum Study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.
- Day, J., & Kalman, D. (1999). Teaching linear algebra: What are the questions. Department of Mathematics at American University in Washington DC, 1-16
- Dorier, J. L. (2003). Teaching linear algebra at university. arXiv preprint math/0305018.
- Dorier, J. L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Springer Netherlands.
- Gómez i Urgellés, J. V. & Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. Uno: *Revista de didáctica de las matemáticas*, (31), 7-23.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). Springer US.
- Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 143). Taiwan: National Taiwan Normal University.

- Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the Teaching of Modeling and Applications. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 1-2). Springer US.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. (*ZDM*) the international journal on Mathematics Education, 38(3), 302-310.
- Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática*, 9(1), 47-60.
- Perdomo-Díaz, J.; Camacho, M.; Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.
- Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.
- Vanegas, J. & Henao, S. (2013) Educación matemática realista: La modelización matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 2883.
- Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, 22(8), 577-599.